LA SUMA Y LA RESTA DE NUMEROS NATURALES, SU LENGUAJE Y REGISTROS DE REPRESENTACIÓN, EN LA ESCUELA PRIMARIA

Lorena Trejo Guerrero, Marta Elena Valdemoros Álvarez
Cinvestav-IPN. (México)
ltrejog@cinvestav.mx, mvaldemo@cinvestav.mx

Palabras clave: suma, resta, lenguaje, número, representación
Key words: addition, subtraction, language, number, representation

RESUMEN

El presente trabajo muestra el resultado obtenido al aplicar una situación de enseñanza en la cual se utilizaron la suma y la resta (como operaciones inversas) en relación a la *construcción del número natural,* en la escuela primaria, para analizar y reconocer las situaciones en las que las operaciones cobran sentido matemático, para saber escoger atinadamente el procedimiento más sencillo en la resolución de un problema, mediante la inclusión de una gran variedad de registros de representación. Así mismo, la aplicación y el reconocimiento de las propiedades de ambas operaciones nos permitieron analizar el uso que el maestro hace del lenguaje, en el aula y su relación con los registros de representación, pudiendo así favorecer la reflexión sobre las condiciones didácticas que pueden propiciar un aprendizaje significativo de la suma y la resta de números naturales.

ABSTRACT

The present work shows the results obtained when applying a learning situation in which were the addition and subtraction (how inverse operations) in relation to the construction of natural number, in elementary school, to analyze and recognize situations in charge operations mathematical sense, to know rightly choose the simplest procedure to solve a problem by including a variety records of representation. In addition, the implementation and recognition of the properties of both operations allowed us to analyze the use of language makes the teacher in the classroom and its relationship to performance records and can promote reflection on the didactical conditions that can lead meaningful learning of addition and subtraction of natural numbers.

Introducción

Desde la Reforma Integral de Educación Básica y de acuerdo con los Planes y Programas 2011 en México, se espera que los alumnos adquieran conocimientos y habilidades en la resolución de problemas comunicando información matemática. Nuestra propuesta deriva del Eje Temático Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico, el cual pretende encontrar el sentido del lenguaje matemático oral o escrito.

Para fortalecer la enseñanza de la aritmética es necesario recurrir a los resultados que aportan los cuestionarios aplicados durante el trabajo etnográfico a los estudiantes de primaria, cuyas experiencias reflexivas respalden la construcción de su aprendizaje de manera autónoma. Mostramos entonces el resultado obtenido de uno de los cinco problemas aritméticos que contiene el cuestionario aplicado a los alumnos de 5° y 6° grados. Para lo anterior es importante resaltar la participación del profesor como observador, lo que le permitió advertir las habilidades y dificultades de sus alumnos durante la resolución del cuestionario.

El problema de investigación y sus correspondientes preguntas

Consideramos la importancia de las habilidades que muestran los estudiantes de la primaria al resolver problemas que impliquen las relaciones entre la suma y la resta como operaciones inversas y sus transformaciones, proponiéndonos analizar los registros de representación involucrados a través del lenguaje usado por el profesor y sus alumnos en el aula. Nuestras preguntas de investigación quedan planteadas de la siguiente manera, con respecto a los profesores: 1) ¿Cómo orientar al maestro en la elaboración de situaciones didácticas que favorezcan la comprensión de la suma y la resta de números naturales, en el niño? Y con respecto a los alumnos: 2) ¿Cómo elaboran sus representaciones para explicar el proceso de resolución que utilizaron?

Marco Teórico

Piaget (2005) menciona con respecto a la reversibilidad: es la posibilidad de concebir simultáneamente dos relaciones inversas, es decir, considerar a cada elemento como mayor que los siguientes y menor que los anteriores. Invertir el orden. Separar en oposición a reunir. El niño necesita de la experiencia para asegurarse la posibilidad de un retorno a la configuración inicial, o para comprender el pasaje de una configuración a otra. Se considera que cada acción puede invertirse, y esta reversibilidad es la que produce el sentimiento de la necesidad de la conservación de los conjuntos y sus equivalencias.

Para analizar las explicaciones de los alumnos durante la clase, tomamos las propuestas de Cazden (1991) empleadas para el reconocimiento de modos particulares de asignación de sentido, lo que les permitirá construir significados y seguir aprendiendo (Bruner, 1987).

Bruner (2001), menciona que los problemas que el niño pequeño resuelve tienen que ver con el uso de sus sentidos y en un principio parece estar relacionado con la percepción, atención, manipulación y locomoción, interacción social, su maduración y desarrollo, agrega que es precisamente el *uso y coordinación* de éstos procesos para la consecución de metas donde nos encontramos con las primeras manifestaciones de resolución de problemas.

Un componente importante en el aprendizaje de las estrategias para resolver problemas matemáticos es la transferencia, pues el alumno puede transferir experiencias de ciertos problemas resueltos en un contexto determinado a otros problemas planteados en contextos diferentes. Existen problema matemáticos en los que los enunciados pueden sugerir qué método o técnica utilizar, sin embargo en su mayoría no pueden ser resueltos a través del uso directo de alguna regla o procedimiento único, sino que necesitan ser transformados a otros dominios y finalmente resolverlos (Pozo, Puy, Domínguez,Gómezy Postigo, 1994).

Tomamos a Duval (1999), quien menciona que en las clases de matemáticas se recurre a varios registros semióticos de representación, algunos de los cuales han sido desarrollados específicamente para efectuar tratamientos matemáticos, ya que la designación de los objetos matemáticos pasa necesariamente por un registro semiótico de representación. El mismo autor menciona que el análisis del funcionamiento cognitivo del pensamiento en torno a las investigaciones realizadas en psicología cognitiva, en particular la representación, la conceptualización, el razonamiento (argumentación, demostración, utilización de lenguajes formales) y la resolución de problemas, lo aborda desde una perspectiva funcional: no hay noesis (intelección) sin semiosis (producción de representaciones semióticas).

En el Estudio de Clases (Isoda, Arcavi, Mena, 2007), se propone el trabajo colegiado de los profesores con la finalidad de aprender a mejorar la educación en el salón de clases (Stigler y Hiebert, 1999), revalorando la importancia del uso amplio del pizarrón (Makoto y Fernández, 2004). En el enfoque de resolución de problemas a partir del Estudio de Clases, se menciona que el verdadero problema es aquél que pone al alumno en un una situación nueva, ante la cual no dispone de procedimiento inmediato para su resolución, por ende, un problema se define en cuanto a su relación en el sujeto que lo enfrenta y no en cuanto a sus propiedades Intrínsecas (Isoda y Olfos, 2009).

Polya (1965) plantea cuatro fases para la resolución de un problema, presenta un conjunto de “heurísticos”, esto es, procedimientos o estrategias que facilitan el desarrollo de la correspondiente fase y suelen identificarse con las llamadas habilidades de pensamiento, puntualiza desde su propia experiencia que para ello es necesario: **Comprender el problema:** identificando la incógnita y los datos, así como las condiciones y si éstas son suficientes o insuficientes o bien redundantes o contradictorias. **Concebir un plan:** para lo cual, es necesario determinar la relación entre los datos y la incógnita; si se ha visto el planteamiento en otro problema semejante o diferente, relacionar los problemas parecidos, percatarse de algún teorema que le pudiera ser útil, de no encontrar una relación inmediata pueden considerarse problemas auxiliares, imaginándose problemas análogos accesibles (ya sea un problema más general o particular) o bien resolviendo una parte, o si se puede deducir algún elemento útil de los datos, si puede cambiar la incógnita o los datos o ambos. **Obtener un plan de solución:** preguntarse si el resolutor ha empleado todos los datos o la condición y si ha considerado todas las nociones concernientes al problema. **En la ejecución del plan:** el estudiante debe comprobar cada uno de los pasos de la solución y corroborar si el paso es correcto y demostrarlo; finalmente, debe examinar la solución obtenida verificando el resultado y el razonamiento, obteniendo el mismo resultado de forma diferente o bien empleando el método en algún otro problema.

Método

El estudio se realizó en una escuela primaria del sistema público en el Estado de Hidalgo, con 6 profesores en servicio de 5° y 6° grados, cuyas edades oscilan entre los 28 y 50 años de edad y sus alumnos, para lo cual trabajamos con dos grupos de 5° (60 estudiantes), dos grupos de 6° (64 estudiantes) y dos grupos multigrados de 5 ° y 6 ° (46 alumnos) sus edades oscilan entre 10 y 12 años. En esta investigación sólo presentamos los resultados obtenidos por un grupo de 29 alumnos de 5° grado.

Los instrumentos metodológicos considerados fueron una sesión inicial de trabajo colegiado con asistencia de 27 profesores en servicio, adaptada del Estudio de Clases descrito por Isoda, Arcavi y Mena2007), en donde se reflexionó acerca de las relaciones entre las operaciones aritméticas básicas. Después, se aplicó a los 6 grupos de alumnos (en sesiones de 50 minutos con cada uno), el cuestionario en presencia del maestro, con la finalidad de que el profesor advierta las habilidades y conocimientos que sus alumnos utilizan al resolverlos, así como las dificultades que enfrentan. Se revisaron los resultados de los alumnos con el profesor titular como observador, en otras 6 sesiones de 50 minutos.

a) Posteriormente, en una sesión de trabajo colegiado con 16 profesores (entre los cuales se encontraban los profesores titulares de los grupos de alumnos a quienes aplicamos el cuestionario), se analizaron los problemas aplicados a los alumnos, haciendo a los profesores el siguiente cuestionamiento: ¿Qué opina de los siguientes problemas matemáticos para alumnos de 5° y 6° grados y qué conocimientos y habilidades requieren sus alumnos para resolverlos?

1. Problema de suma y resta como operaciones inversas

Este cuestionamiento nos permitirá apreciar las habilidades de los estudiantes de primaria al resolver problemas de suma y resta como operaciones inversas. Es de opción múltiple y su respuesta correcta corresponde al inciso a), ver Tabla 1.

Tabla 1. Problema de suma y resta como operaciones inversas.

1. Fíjate en la siguiente serie numérica, observa cómo van cambiando los números:

100, 85, , 55, , 25

Si continúas la secuencia, ¿qué números deberás colocar en los espacios vacíos?

a) 70, 40, 10
b) 75, 45, 15
c) 45, 75, 35
d) 80, 50, 20
e) *http://www.elhuevodechocolate.com/mates.htm

Para este problema se reconocieron tres respuestas diferentes de los alumnos, las cuales mostramos en la Tabla 2 y en el siguiente texto, en donde incluimos algunos ejemplos.

Tabla 2. Categorías de análisis del problema 1.

Solución de los alumnos	Transcripción de la solución
a) Sólo coloca los números donde corresponden para comprobar su respuesta. 100, 85,70, 55,40, 25,10	100, 85, 70, 55, 40, 25, 10
b) Resta comenzando con el 100. 100 - 85 = 015; 85 - 15 = 70; 70 - 15 = 55; 55 - 15 = 40; 40 15 = 25; 25 - 15 = 10	100 - 85 = 015; 85 -15 = 70; 70 -15 = 55; 55 -15 = 40; 40 -15 = 25; 25 -15 = 10
c) Resta desde el 85 para comprobar su respuesta. 85 - 15 = 70; 55 - 15 = 40; 25 - 15 = 10	85 -15 = 70; 55 -15 = 40; 25 -15 = 10

■ Análisis de resultados de los estudiantes

a) Seis estudiantes de 29, sólo coloca los números donde corresponden para comprobar su respuesta, lo cual nos indica que al colocarlos advierte que entre el 100 y el 85 hay 15.

b) Un niño de 29, resta comenzando con el 100: lo que indica que para este alumno fue necesario comprobar si entre el 100 y el 85 había 15, no obstante realizó todas las restas necesarias. A partir de lo que plantea Polya (1965) sobre las etapas para la resolución de un problema, observamos que este niño comprendió el problema, concibió un plan, lo ejecutó y al momento de hacer la visión retrospectiva que implica verificar el resultado, realizó todas las restas.

c) Un alumno de 29, resta desde el 85 para comprobar su respuesta: por lo que podemos ver ha descubierto que hay 15 entre el 100 y el 85, pero no está del todo seguro, por lo tanto decide efectuar las restas correspondientes.

Los resultados presentados al problema anterior, por los estudiantes, nos muestran que fue uno de los problemas con menos éxito dado que solamente 8 alumnos de 29 respondieron correctamente. Los posibles errores se deben a las opciones que se presentan para su resolución, las cuales contienen numerales que si bien no guardan una relación directa con la respuesta correcta si se prestan a confusión, en el caso de las opciones del inciso b) 75, 45, 15, los números terminan en 5, lo cual puede prestarse a confusión si a simple vista se relacionan con el 85, 55, ,25 sin considerar al 100 como punto de partida. En el inciso c) se aprecian números que no tienen una relación con el problema, el cual es fácil de descartar y d) 80, 50, 20, son números que tienen relación con el 85, 55 y 25 lo cual puede prestarse a confusión si el estudiante no advierte que el punto de partida que es el 100.

■ Opinión de los profesores

En el caso del problema 1, los profesores al resolver el problema en la sesión colegiada mostraron una estrategia empleada diferente a las utilizadas por los alumnos, la cual presentamos en la Tabla 3.

Tabla 3. Respuesta de uno de los profesores al problema 1 de los alumnos.

a) Resta de 15 a cada número -15 -15 -15 -15 100, 85, , 55, , 25	*Transcripción de la resolución -15 -15 -15 -15 100, 85, ,55, , 25

■ Análisis del resultado de la profesora Elsa, en la sesión colegiada

a) Al socializar las diversas formas de solucionar el problema una de 16 de los profesores participantes a diferencia de los alumnos y los maestros (quienes coincidentemente presentaron estrategias afines), resolvió el problema restando 15 al número 100, lo cual dedujo del orden de la secuencia entre 100 y el 85.

Lo anterior nos muestra que aún hay diversas formas de solucionar un problema, analizarlas entre profesores es muy importante para enriquecer las estrategias de enseñanza y conducir a los estudiantes al descubrimiento de todos los procedimientos posibles. Los profesores llegaron a la conclusión de que es un problema de resta y la resolución se comprueba con una suma, lo reafirmó uno de los profesores que estuvo presente cuando se aplicó el cuestionario a los alumnos.

■ Validación de resultados

Para validar la investigación se realizaron los primeros “ensayos preliminares” de los instrumentos metodológicos, a fin de ratificar su funcionalidad, una vez concluida esta fase se aplicó el cuestionario. Durante la sesión de aplicación, la sesión de revisión (ambas en presencia del profesor de grupo) y la sesión de discusión en trabajo colegiado (el profesor de grupo y sus colegas), observamos que el diseño de las situaciones problemáticas planteadas nos proporciona los elementos para indagar sobre las dificultades que se enfrentan en la enseñanza-aprendizaje de las operaciones aritméticas básicas y sus propiedades en los consiguientes procesos de significación.

■ Resultados globales

Dado que algunos alumnos completaron la serie de manera descendente, muchos de ellos usaron la resta, otros optaron por sumar de modo ascendente. Todos ellos debieron reconstruir mentalmente la serie y usar procedimientos mixtos (de suma y de resta) para resolver el problema. A lo anterior agregamos que es necesario reflexionar en la dimensión didáctica de los maestros para que en su práctica logren motivar, promover y trabajar el desarrollo del pensamiento matemático en los alumnos de la primaria. Enfatizar que aprender matemáticas necesariamente implica **aprender a pensar**, hay que desarrollar habilidades y capacidades de razonamiento lógico a través de la construcción e identificación de patrones lo cual confluye con lo planteado por Isoda, Arcavi y Mena (2007).

Lo importante para esta investigación es que le brindamos a los profesores la oportunidad de observar a sus estudiantes, para que puedan advertir que un alumno se expresa en voz alta cuando busca la solución de un problema y revela su pensamiento para compartir y comparar con otras formas de resolver un mismo problema; al mismo tiempo, pudieron observar que el pensamiento en voz alta lo hace capaz de ver con más detalle sus propias actividades de razonamiento y comprobar las estrategias que utiliza y cuáles son las dificultades que enfrenta, lo cual les permitirá ayudar a los estudiantes a pesar de un nivel de conocimiento determinado a otro superior. La reflexión de los maestros en la sesión colegiada privilegió el respeto de los diversos razonamientos de los niños y sus correspondientes procedimientos, para que se pueda alcanzar una mejor comprensión de las sumas y las restas implicadas.

■ Conclusiones

La aplicación del cuestionario, así como la sesión colegida del problema de suma y resta, nos permiten revisar la manera de otorgar significado al número natural a partir del uso del completamiento de una serie de números naturales y la comprensión de las propiedades de la adición y de la sustracción, así como los procesos de reversibilidad entre una y otra. Durante el estudio de las sesiones de aplicación del cuestionario a los alumnos y en la sesión de revisión en trabajo colegiado con los profesores, confirmamos que maestros y alumnos, al desarrollar las actividades, nos permiten observar la aplicación de las propiedades de la suma y la resta así como la representación mental del problema, lo cual nos explicaron mediante sus argumentos.

Con el trabajo presentado podemos dar cuenta de la recomposición del pensamiento de los alumnos y los profesores, éstos últimos mencionan que *"las principales dificultades que enfrentan sus estudiantes están relacionados al lenguaje y la comprensión del problema como tal",* lo cual podemos interpretar como la existencia de por lo menos dos características típicas de la **actividad cognitiva ligada a los procedimientos matemáticos** que marcan una diferencia con la **actividad cognitiva para el aprendizaje de otras disciplinas** y que la constituyen en un campo de estudio privilegiado para el análisis de las actividades intelectuales humanas, lo cual confluye con lo planteado por Duval (1999).

La revaloración del uso de recursos didácticos como el pizarrón, permite apreciar la variedad de registros de representación que los alumnos pueden utilizar en la resolución de problemas como aquí se ha presentado, lo cual optimiza las habilidades de los alumnos y fortalece las habilidades didácticas de los profesores.

Finalmente, sintetizamos que provocar espacios de reflexión en colectivo con los profesores les permite discutir ventajas y desventajas del tipo de problemas que utilicen, considerando la relación entre las formas de **representar, analizar y comprender ideas matemáticas** relacionadas con el contenido matemático a enseñar -ya sea del significado del número natural o de las operaciones aritméticas básicas con números naturales como la suma y la resta en este caso-, les permitirá conducir a sus alumnos a descubrir diversos caminos para resolver problemas usando los números y signos formales de la matemática, posibilitando el empleo de unidades de información cada vez mayores en la solución de problemas.

Referencias bibliográficas

Bruner, J. (1987). *Desarrollo cognitivo y educación*. Madrid, España: Editorial Morata.

Bruner, J. (2001). *Acción, pensamiento y lenguaje.* Madrid, España: Alianza.

Cazden, C. B. (1991). *El discurso en el aula*: El lenguaje de la Enseñanza y el Aprendizaje. Barcelona, España: Paidós.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Peter Lang Ediciones – Universidad del Valle.

Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, A. (2007). *El estudio de clases japonés en matemáticas.* Valparaiso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaiso.

Isoda, M. y Olfos R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas.* En la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Valparaiso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Makoto, Y. y Fernández, C. (2004). *A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning.* New Jersey, USA: Lawrence Erlbraum Associates, Inc.

Piaget, J. (2005). *Introducción a la epistemología genética*. México, México: Paidós.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México. México: Editorial Trillas.

Pozo, I., Puy, P. M., Domínguez, J., Gómez, M. A. y Postigo, Y. (1994). *La nueva solución de problemas*. Madrid, España: Editorial Santillana.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Planes y programas de estudio*. México, D. F.

Stigler, J. W. y Hiebert, J. (1999). *The teaching gap.* Best ideas from the world's teacher for improving education in the classroom. New York, USA: The free press.